ANALIZA FUNKCJONALNA
LISTA 1

1. Pokazać, że zbiór

$$B(S) = \{f : S \to \mathbb{R} : \sup_{s\in S} |f(s)| < \infty\}$$

gdzie S jest dowolnym zbiorem, z naturalnymi operacjami dodawania punktowego i mnożenia przez liczby rzeczywiste jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{R}$.

2. Oznaczając $l^\infty = B(\mathbb{N})$, pokazać, że

   (a) podzbiór c ciągów zbieżnych $x = (x_1, x_2, \ldots)$, tzn. takich że $\lim_{n\to\infty} x_n$ istnieje i jest skończona, jest podprzestrzenią liniową przestrzeni l^∞

   (b) podzbiór c_0 ciągów $x = (x_1, x_2, \ldots)$ takich że $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni c,

   (c) podzbiór c_{00} ciągów, które posiadają skończenie wiele wyrazów różnych od zera, jest podprzestrzenią liniową przestrzeni c_0

3. Pokazać, że funkcja $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ zadana wzorem

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x = y \\ 1 & \text{gdy } x \neq y \end{cases}$$

dla dowolnego zbioru X jest metryką na X (tzw. *metryką dyskretną*).

4. Pokazać, że funkcja $\rho : C[a, b] \times C[a, b] \to \mathbb{R}$ zadana wzorem

$$\rho(f, g) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$$

jest metryką na przestrzeni liniowej $C[a, b]$ (tzw. *metryką maximum*).

5. Pokazać, że funkcja $\rho : C[a, b] \times C[a, b] \to \mathbb{R}$ zadana wzorem

$$\rho(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

jest metryką na przestrzeni liniowej $C[a, b]$.

6. Pokazać, że zbieżność ciągu funkcji $f_n \in C[a, b]$ do funkcji $f \in C[a, b]$ w metryce z zadania 4, tzn. $\lim_{n\to\infty} \rho(f_n, f) = 0$, jest zbieżnością jednostajną na $[a, b]$.

7. Pokazać, że funkcja $\rho : B(S) \times B(S) \to \mathbb{R}$ zadana wzorem

$$\rho(f, g) = \sup_{s\in S} |f(s) - g(s)|$$

jest metryką na przestrzeni liniowej $B(S)$ (tzw. *metryką supremum*).

8. Pokazać, że jeżeli (X, ρ) jest przestrzenią metryczną oraz

$$\widehat{\rho}(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}$$

to $(X, \widehat{\rho})$ jest także przestrzenią metryczną.

9. Niech (X_1, ρ_1), (X_2, ρ_2) będą przestrzeniami metrycznymi i niech $X = X_1 \times X_2$ (ich iloczyn kartezjański). Definiujemy

$$\rho(x, y) = \rho_1(x_1, y_1) + \rho_2(x_2, y_2)$$

gdzie $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in X$. Pokazać, że ρ jest metryką.

10. Pokazać, że (X, ρ) z poprzedniego zadania jest zupełna (ośrodkowa) wtedy i tylko wtedy gdy (X_1, ρ_1) oraz (X_2, ρ_2) są zupełne (ośrodkowe).

11. Pokazać, że przestrzeń liniowa $C[a, b]$ z metryką z zadania 4 jest zupełna.

12. Pokazać, że przestrzeń liniowa $C[a, b]$ z metryką z zadania 5 nie jest zupełna, konstruując ciąg Cauchy'ego, który nie jest zbieżny do funkcji ciągłej w tej metryce (wskazówka: do konstrukcji takiego ciągu f_n można wykorzystać funkcje, których wykresy składają się z trzech odcinków, dwóch poziomych i jednego liniowego).

13. Zbadać zupełność przestrzeni liniowych c, c_0, c_{00} z zadania 2.

14. Pokazać, że $C[a, b]$ z metryką maximum z zadania 4 jest ośrodkowa, wskazując przeliczalny i gęsty zbiór funkcji, których wykresy składają się ze skończonej liczby odcinków.

15. Zbadać ośrodkowość przestrzeni liniowych c, c_0, c_{00} z zadania 2.

R. Lenczewski